東京大学理系数学 2018[問題][解答/解説]

composed by mathemagician-int

第 1 問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \qquad (0 < x < \pi)$$

の増減表を作り，$x \to +0, x \to +\infty$ の極限を求めよ．

解答

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x - x\cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x(2x - \sin 2x)}{2\sin^2 x} \end{aligned}$$

であり，また，$0 < x < \pi$においては $2x > \sin 2x$ かつ $\sin^2 x > 0$ が成立するので，

$$\begin{aligned} &0 < x < \pi \text{かつ } f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &0 < x < \pi \text{かつ } \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow &x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であるから，$f'(x)$ の符号に注意して，$f(x)$ の増減表は次の通り．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

また，極限は次の通り．

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 1 + 1 = 2 \qquad (\because \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1)$$

$$\lim_{x \to \pi - 0} f(x) = +\infty$$

第 2 問

数列 $a_1, a_2, \cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}C_n}{n!} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．

(1)$n \geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ で表すとき，分母 $p_n \geqq 1$, 分子 q_n を求めよ．
(2)a_n が整数となる $n \geqq 1$ を全て求めよ．

▷$keywords$: コンビネーション (組合せ)，階乗，連続 n 整数の積，ユークリッドの互除法，離散関数の扱い

▷ 本稿では (2) において a_nが $n \geqq 4$ で狭義短調減少することを用いて解を絞り込んだ (合格答案) が，分母分子のパリティ (偶奇) に注目すればよりエレガントな別解 (模範解答) が構成できる．

▷ 参考として，$CommonLisp$ 上で動く，a_nを計算するコードを付記した．各自実験されたい．

解答

(1)$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{\frac{1}{2}n(n+1)} \cdots ①$

連続 2 整数 $n, n+1$ の偶奇は異なるので，$n(n+1)$ は 2 で割り切れる．すなわち $\dfrac{1}{2}n(n+1) \in \mathbb{N} \cdots (*)$

Euclid の互除法により，

$$\begin{cases} G.C.D(2n+1, n) = G.C.D(n, 1) = 1 \\ G.C.D(2n+1, n+1) = G.C.D(n+1, n) = G.C.D(n, 1) = 1 \end{cases}$$

であるから，$2n+1$ と n，$n+1$ と n はそれぞれ互いに素である．$\cdots (**)$

$(*)(**)$ より，①の最右辺は既約分数である．

$\therefore p_n = \dfrac{1}{2}n(n+1), q_n = 2n+1$

(2)$\{a_n\}$ の定義式に従い順に計算することで，

n	1	2	3	4	$\cdots$
a_n	3	5	$\frac{35}{6}$	$\frac{21}{4}$	$\cdots$

上表の値と ① を繰り返し用いることで，

$$a_n = a_1(\prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}}) = 3(\prod_{k=2}^{n} \frac{2(2k+1)}{k(k+1)}) = 5(\prod_{k=3}^{n} \frac{2(2k+1)}{k(k+1)}) = \frac{21}{4}(\prod_{k=4}^{n} \frac{2(2k+1)}{k(k+1)}) = \cdots$$

が成り立つ．また，$k \geqq 4$ に対して，

$k(k-1) - 2(2k-1)$

$= k^2 - 3k - 2 \geqq 2 > 0$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{2(2k+1)}{k(k+1)} < 1$

が成り立つことから，

$\{a_n\}$ は $n \geqq 4$ に対して正の値を取りながら狭義単調減少する．

よって，$\{a_n\}$ が取りうる整数値の候補は $1, 2, 3, 4, 5$ に限られる．

ここで，改めて冒頭の表の続きを追加すると，

n	5	6	7	8	$\cdots$
a_n	$\frac{77}{20}$	$\frac{143}{60}$	$\frac{143}{112}$	$\frac{2431}{4032}$	$\cdots$

よって，a_8の時点で 1 を下回り，これ以降で a_nが整数値を取ることはないことがわかる．

以上より，題意を満たすような n は n=1,2 である．

参考

本問の a_nを直接計算する関数$''abc''$を $CommonLisp$ で実装するコードは次の通り．

```
(defun factorial (n)
  (if (<= n 1)
      1
      (* n (factorial (1- n)))))

(defun combination (a b)
  (/ (factorial a) (* (factorial b) (factorial (- a b)))))

(defun abc (n)
  (/ (combination (+ (* n 2) 1) n) (factorial n)))
```

第 3 問

放物線 $y=x^2$ のうち，$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点 O と点 $A(1,0)$ を考える．$k>0$ を実数とする．点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OQ}$$

を満たす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする．

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+0}S(k), \lim_{x\to\infty}S(k)$ を求めよ．

解答

$\overrightarrow{OP}=(t,t^2)(-1 \leqq t \leqq 1$ー①$)$

$\overrightarrow{OQ}=(s,0)(0 \leqq s \leqq 1$ー②$)$

と置ける．このとき，

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OQ}=(\dfrac{t}{k}+ks,\dfrac{t^2}{k})$

である．これ以降，点 R の座標を (X,Y) として，$k>0$ を一旦固定して，①②の範囲で s,t を動かしたときの R の軌跡の方程式を求める．まず，変域に注意して t を消去すると

$$X=\frac{t}{k}+ks, Y=\frac{t^2}{k}, -1 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq s \leqq 1$$
$$\Leftrightarrow Y=k(X-sk)^2, sk-\frac{1}{k} \leqq X \leqq sk+\frac{1}{k}, 0 \leqq s \leqq 1$$

を得る．これは，頂点 $(sk,0)$, 端点 $(sk-\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k})(sk+\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k})$ なる放物線の一部である．

次いで，$0 \leqq s \leqq 1$ の範囲で s を動かすと，上に示した放物線を x 軸上で大きさを一定に保ったままスライドさせることにより，R の可動範囲である領域が得られる．

$k-\dfrac{1}{k}$ と $\dfrac{1}{k}$ の大小関係に注意して，場合分けの分岐点は $k=\sqrt{2}$ である．よって，$S(k)$ は以下の通り．

[1]$0<k \leqq \sqrt{2}$ のとき

$S(k)=\dfrac{1}{k}(k+\dfrac{2}{k})-2\{\displaystyle\int_{-\frac{1}{k}}^{0}kx^2dx+\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}}(\frac{1}{k}-kx^2)dx\}=2-\frac{k^4}{12}$

[2]$k>\sqrt{2}$ のとき

$S(k)=\dfrac{1}{k}(k+\dfrac{2}{k})-2\displaystyle\int_{-\frac{1}{k}}^{0}kx^2dx=1+\frac{4}{3k^2}$

従って，$S(k)$ の極限は次の通り．

$\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)=\lim_{k\to+0}(2-\frac{k^4}{12})=2$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}(1+\frac{4}{3k^2})=1$

第 4 問

$a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく．次の 2 条件を満たす点 (a, b) の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件 1　：　方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実解をもつ．

条件 2　：　さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を$\alpha < \beta < \gamma$とすると，$\beta > 1$ である．

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．点 $P(z)$ は C 上にあり，点 $A(1)$ とは異なるとする．点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $Q(u)$ とする．$w = \dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を$\bar{w}$で表す．

(1)u と $\dfrac{\bar{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$ を求めよ．

(2)C のうち実部が$\dfrac{1}{2}$以下の複素数で表される部分を C'とする．点 $P(z)$ が C'上を動くときの点 $R(w)$ の軌跡を求めよ．

第 6 問

座標空間内の 4 点 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(1,1,1)$ を考える．

$\dfrac{1}{2} < r < 1$ とする．点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分をそれぞれ V_1, V_2, V_3とする．

(1)平面 $y = t$ が V_1, V_3双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ．さらに，この範囲の t に対し，平面 $y = t$ と V_1の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3の共通部分を同一平面上に表示せよ．

(2)V_1と V_3の共通部分が V_2に含まれるための r についての条件を求めよ．

(3)r は (2) の条件を満たすとする．V_1の体積を S とし，V_1と V_2の共通部分の体積を T とする．V_1, V_2, V_3を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ．

(4)ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする．S と T を求め，V の体積を決定せよ．