

mathemagician – int オリジナル模擬試験 1
解答制限時間 300 分 (30[分/題] × [10 題])

注意

1 頁 1 問.

別解も (思いつく限り) 構成してみること.

解法探索 (デッサン, 計算過程) と答案記述 (清書, rewrite) は別モノ.

解の吟味 (必要性・充分性) や論理構築の推敲など抜かりなく実行のこと.

故に, 公式, 立式, 計算過程は本問題集に書き込み, 答案作成は別のノートに清書することをすすめる.

次頁より, 問題編に移る.

第 1 問

$\tan 1^\circ$ は有理数か.

第 2 問

一般角に対する正弦の加法定理 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ の証明を与えよ.

第 3 問

$\cos 36^\circ$ の値を求めよ.

第 4 問

数列 $\{a_n\}(n = 1, 2, 3, \dots)$ を次の三項間漸化式で定義する.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (a_2 = a_1 = 1)$$

このとき, 一般項 a_n および公比の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.

第 5 問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ.

第 6 問

方程式 $8^x + 27^x + 64^x + 125^x = 24^x + 30^x + 40^x + 60^x$ の実数解を全て求めよ.

第 7 問

素数 p, q に対して, $p^q + q^p$ も素数となるような (p, q) の組を全て求めよ.

第 8 問

一泊 500 円のホテルがあり，そこに 500 円玉のみ持った n 人と，1000 円札のみ持った n 人の合計 $2n$ 人の客を泊ませたい．ホテルの受付は受付開始時はつり銭を全く準備していないとし，また，客同士は事前にお金を融通しあうことはおろか会話すらしないものとする．つり銭が不足しないような客の来方は何通りあるか．

第9問

xy 直交座標系で表現される平面上に直線 $l: tx + y + t^2 = 0$ がある. t を $0 \leq t \leq 1$ の範囲で動かすとき直線 l の通過する領域を図示せよ.

第 10 問

無理数^{無理数} = 有理数を満たすものは存在するか、存在しないならばそのことを証明し、存在するならば実例を挙げよ。