黄金比と無限連分数の関係

jinterstellar

2018 年 3 月 14 日

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}} \tag{1}$$

本稿の目的は，上記 (1) 式に示した無限連分数の値を求めることである．自己相似性のある分数式が際限なく続く (1) 式は少々取り扱いが厄介に見えるが，式の値を求めるだけなら puzzle solving の要領で，2 次方程式の解の公式を習得して間もない者でも十分に可能である．

指針 1

算数から数学へ移行する際に学習する基本的過ぎて忘れがちなルール，すなわち
「未知数は x とおいて代数方程式に帰着させよ.」
を利用する．本問ではカタマリ全体を x と置けば，高々 2 次方程式に帰着する．

解答 1

求める式の値を x とおくと，
$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}=x \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ かつ $x\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
を得る．ここで題意より $x>0$ であるので，2 解のうち正のものを採用して，$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$が求める式の値である．

…………………………………………………………………………………………

$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金数 or 黄金比と命名される特別な数である．本稿では以下もっぱら ϕ という記号を用いる．

ふむ，一見して解答が求まったように見える．しかし，健全な精神と明晰な頭脳をお持ちの皆様におかれては，次のような疑問にぶちあたることだろう．上の解答では都合よく最初の 2 項に注目して未知数 x を求めたが，実際には上式は $x=1+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\cdots$ のように際限なく続いていく筈なので，都合よく $x\simeq\phi$ とするのは釈然としない．そもそもこの式を満たす数が存在することは証明できるのか？ なぜ負号は解から除外できるのか？　――至極ごもっともな疑問である．このように無限回の操作を正確に扱うには数列の極限を用いる必要がある．そこで，題意の式を数列を用いて構成することによる解答を試みる．

指針 2

$$P_{n+1}=1+\frac{1}{P_n}\quad(n\geq 1)\qquad \text{かつ}\qquad P_1=1 \tag{2}$$

二項間漸化式 (2) を順に書き出してみると，$P_1=1, P_2=1+\frac{1}{1}, P_3=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$ のようになり，$n\to\infty$ とすれば P_n は題意の無限連分数 (1) を構成できることが確認されよう．解法 1 とは逆に，「割線を積み上げていくイメージ」と言えば伝わるだろうか．

自然数全体に対して定義された実数列 $\{P_n\}$ がある $a\in\mathbb{R}$ に収束すること，言い換えれば，$\lim_{n\to\infty}P_n=a$ を満たす $a\in\mathbb{R}$ が存在することを示せば，$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}$ の極限値 a の存在が保証される．

手を動かして地道に実験すれば，$P_1=1, P_2=2, P_3=\frac{3}{2}, P_4=\frac{5}{3}, P_5=\frac{8}{5}, P_6=\frac{13}{8}$ となり，分母と分子がそれぞれ隣接するフィボナッチ数になるという規則性が見つかる．これより，P_n の一般項を求めるために，フィボナッチ数列 $\{Q_n\}$ を導入すればよいことがわかる．

解答 2

フィボナッチ数列 $\{Q_n\}$ は $Q_{n+2}=Q_{n+1}+Q_n$ かつ $Q_1=Q_2=1$ なる三項間漸化式で定義されており，
その一般項は $Q_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}$ となることが知られている．(証明，導出は省略する．)
[1] まず，$P_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$——($\clubsuit$) が成立することを示す．
$P_1=\frac{Q_2}{Q_1}$ は明らかに成り立つ．
($\clubsuit$) が $n=k(k\in\mathbb{N})$ に対して成立すると仮定すれば，
$P_{k+1}=1+\frac{1}{P_k}=1+\frac{Q_k}{Q_{k+1}}=\frac{Q_k+Q_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{Q_{k+2}}{Q_{k+1}}$
つまり，$n=k+1$ のときも ($\clubsuit$) が成立する．
よって，数学的帰納法から ($\clubsuit$) は任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し成立する．
[2] 引き続いて，$P_n=\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ の極限を求める．
ここで $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=(-\phi)^{-1}$ が成立するので，改めて
$Q_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^n-(-\phi)^{-n}\}$ と書き直すことが出来る．このとき，

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^{n+1}-(-\phi)^{-n-1}\}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^n-(-\phi)^{-n}\}}=\frac{\phi^{n+1}-(-\phi)^{-n-1}}{\phi^n-(-\phi)^{-n}}=\frac{\phi^{n+1}\{1-\frac{(-\phi)^{-n-1}}{\phi^{n+1}}\}}{\phi^n\{1-\frac{(-\phi)^{-n}}{\phi^n}\}}=\phi\cdot\frac{1-\frac{(-1)^{n+1}}{\phi^{2n+2}}}{1-\frac{(-1)^n}{\phi^{2n}}}$$

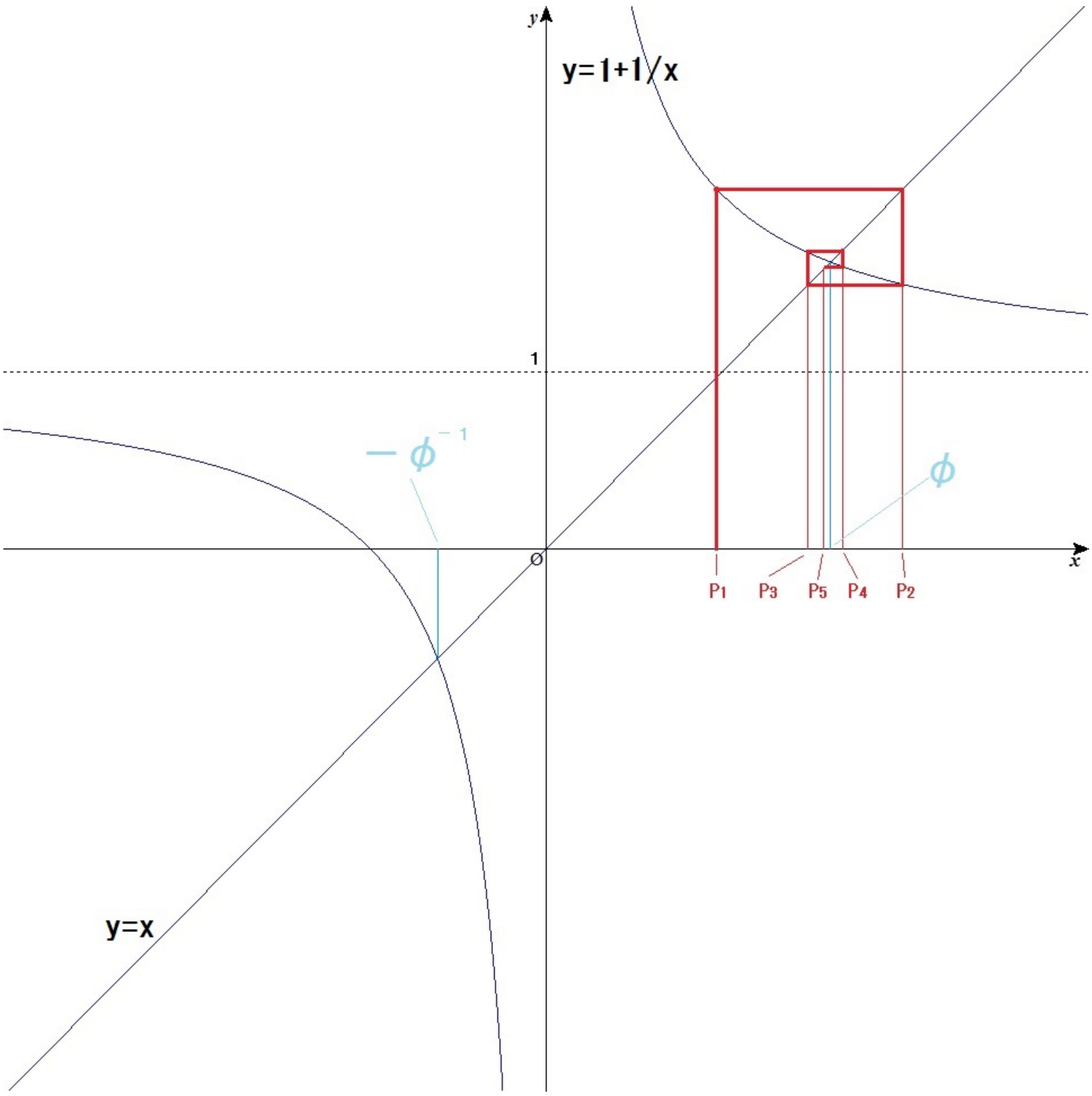
$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}}{Q_n}=\phi$$

以上 [1][2] より，$\lim_{n\to\infty}P_n=\phi(=\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ であることが示せた．

……………………………………………………………………………………………

以上より，(1) 式を満たす数が存在し，ϕ に一致することも確認出来た．と同時に，問題となっている 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 解のうち負号を有するものはありえないことがはっきりした．めでたしめでたし．

また，(2) 式「$P_{n+1}=1+\frac{1}{P_n}\quad(n\geq 1)\qquad$ かつ $\qquad P_1=1$」を視覚的にイメージする方法として，$y=x$ と $y=1+\frac{1}{x}$ をプロットしたグラフ上でぐるぐると螺旋模様を描く方法がある．次頁に載せるので参考にして欲しい．



$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \cdots$ のように n の値が増加するに従い P_n がϕに近づく様子がわかる.