解答編

第 1 問

$\tan 1^\circ$は有理数か.

解 1

(前半) 命題 $A : \tan 1^\circ$が有理数であるならば，任意の自然数 n に対して $\tan n^\circ$も有理数である $\cdots$ (♣) が真であることを数学的帰納法を用いて示す.

[1]$n = 1$ のとき

仮定より $\tan 1^\circ$は有理数であるので，(♣) が成立する.

[2]$n \leqq k$ のとき (♣) が成立するとする.

すなわち $i = 1, 2, 3, \cdots, k$ に対して　$\tan i^\circ = \dfrac{a_i}{b_i}$　(a_i, b_iは互いに素，$a_i \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{N}$) と表せるとする.

このとき，正接に関する加法定理　$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$　より，

$$\begin{aligned}\tan(k+1)^\circ &= \frac{\tan k^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan k^\circ \tan 1^\circ} \\ &= \frac{\dfrac{a_k}{b_k} + \dfrac{a_1}{b_1}}{1 - \dfrac{a_k}{b_k}\dfrac{a_1}{b_1}} \\ &= \frac{a_k b_1 + a_1 b_k}{b_k b_1 - a_k a_1}\end{aligned}$$

が成立する．$a_k b_1 + a_1 b_k \in \mathbb{Z}$,　$b_k b_1 - a_k a_1 \in \mathbb{Z}$ だから，$\tan(k+1)^\circ$も有理数となる.

これは，$n = k + 1$ のときに (♣) が成立することを意味する.

以上 [1][2] より，数学的帰納法から，命題 A が真であることが証明できた.

(後半) $\tan 1^\circ$が無理数であることを背理法を用いて示す.

$\tan 1^\circ$が有理数であると仮定すると，命題 A により $\tan 30^\circ$も有理数であるという帰結が得られるが，これは，実際には $\tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ が無理数であることに矛盾する．従って，$\tan 1^\circ$は有理数ではなく，すなわち無理数である．$(Q.E.D)$

解 2

(方針のみ提示)

パズル部分弄り ver．骨子である背理法の部分は変わらないので [解 1] のマイナーチェンジ版.

$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 30$

第 2 問

一般角に対する正弦の加法定理$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$の証明を与えよ.

解答

二次元直交座標系 (xy 平面) 上に二点 $P(\cos\alpha,\sin\alpha), Q(\cos\beta,\sin\beta)$ を設定する.
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1, \cos^2\beta+\sin^2\beta=1$ より P, Q は原点中心単位円周上の 2 点である.
これらを原点中心に $-\beta$回転させて, $P'(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)), Q'(1,0)$ を得る.
このとき, $\triangle OPQ\equiv\triangle OP'Q'(\because$ 二辺夾角相等) が成立することより,

$$\begin{aligned}
&PQ=P'Q'\\
\Leftrightarrow &PQ^2=P'Q'^2\\
\Leftrightarrow &(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2(\alpha-\beta)+\{1-\cos(\alpha-\beta)\}^2\\
\Leftrightarrow &2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=2-2\cos(\alpha-\beta)\\
\Leftrightarrow &\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \text{—①}
\end{aligned}$$

も成立する. ①において$\beta\to-\beta$と置換して,

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\
\Leftrightarrow &\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \text{—②}
\end{aligned}$$

も成立する. ②において, $\beta\to\frac{\pi}{2}$と置換して,

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}\\
\Leftrightarrow &\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha \text{—③}
\end{aligned}$$

も成立する. ②において, $\beta\to\pi$と置換して,

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\pi)=\cos\alpha\cos\pi-\sin\alpha\sin\pi\\
\Leftrightarrow &\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha \text{—④}
\end{aligned}$$

も成立する. ③において, $\alpha\to\alpha+\frac{\pi}{2}$と置換して, ④を利用することにより,

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\\
\Leftrightarrow &-\cos\alpha=-\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\\
\Leftrightarrow &\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha \text{—⑤}
\end{aligned}$$

も成立する. ②において, $\alpha\to\alpha+\frac{\pi}{2}$と置換して, ③④⑤を利用することにより,

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2})=\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})\cos\beta-\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\sin\beta\\
\Leftrightarrow &-\sin(\alpha+\beta)=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\
\Leftrightarrow &\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

も成立する. $(Q.E.D)$

第 3 問

$\cos 36^\circ$ の値を求めよ．

解 1

(方針)　いうなれば 5 倍角の公式.[*1]

$$\theta = \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 5\theta = \pi$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
&\cos 5\theta = \cos \pi \\
\Leftrightarrow &\cos(3\theta + 2\theta) = -1 \\
\Leftrightarrow &\cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta = -1 \\
\Leftrightarrow &(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(2\cos^2\theta - 1) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)2\sin\theta\cos\theta = -1 \\
\Leftrightarrow &16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow &(\cos\theta + 1)(16\cos^4\theta - 16\cos^3\theta - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow &(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &\cos\theta = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

$0 < 36^\circ = \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \cos\dfrac{\pi}{5} < 1$ である．上記 3 解候補のうちこれを満たすのは,

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

のみである．

解 2

$$\theta = \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 5\theta = \pi$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
&\cos 3\theta = \cos(5\theta - 2\theta) \\
\Leftrightarrow &\cos 3\theta = \cos(\pi - 2\theta) \\
\Leftrightarrow &\cos 3\theta = -\cos 2\theta \\
\Leftrightarrow &4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -2\cos^2\theta + 1 \\
\Leftrightarrow &4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow &(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow &\cos\theta = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

[*1] 加法定理の代わりにド・モアブルの公式を利用する手も考えられるが，面倒なので掲載しない．

$0 < 36^\circ = \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$より，$0 < \cos\dfrac{\pi}{5} < 1$ である．上記 3 候補のうちこれを満たすのは，

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

のみである．

解 3

(方針)　*Gauss* 平面*2上で考える．原点中心単位円周上の点 $P_1(\cos\dfrac{\pi}{5}, \sin\dfrac{\pi}{5})$ を設定し，次いで$\theta := \dfrac{\pi}{5}$，$z := \exp(i\theta)$ として，$P_i(z^{2i-1})(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ が正五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$を形成する状況下で議論を展開する．

$\theta := \dfrac{\pi}{5}$，$z := \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$とおくと，

$$z^5 = \exp(i\theta)^5 = exp(i5\theta) = \exp(i\pi) = -1$$

が成立する．次いで，$z \neq 0, z \neq -1$ を考慮して，

$$\begin{aligned}
&z^5 = -1 \quad \text{かつ } z \neq 0, z \neq -1\\
\Leftrightarrow&(z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \quad \text{かつ } z \neq 0, z \neq -1\\
\Leftrightarrow&z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \quad \text{かつ } z \neq 0, z \neq -1\\
\Leftrightarrow&z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \quad \text{かつ } z \neq 0, z \neq -1\\
\Leftrightarrow&(z + \frac{1}{z})^2 - (z + \frac{1}{z}) - 1 = 0 \text{—①} \quad \text{かつ } z \neq 0, z \neq -1
\end{aligned}$$

を得る．$w := z + \dfrac{1}{z} = \cos\theta + i\sin\theta + \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$とおくと，

$$\text{①} \Leftrightarrow w^2 - w - 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

が成立し，$0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$より，$0 < \cos\dfrac{\pi}{5} < 1 \Leftrightarrow 0 < 2\cos\theta < 2 \Leftrightarrow 0 < w < 2$ であることを考慮して，

$$w = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

を得る．

*2 複素数平面

第 4 問

数列 $\{a_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ を次の三項間漸化式で定義する．

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \qquad (a_2=a_1=1)$$

このとき，一般項 a_n および公比の極限 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

解答

$$a_{n+2}-(p+q)a_{n+1}+pqa_n=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n) \\ a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n) \end{array} \right. \text{—①}$$

が成立する．また，

$$a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-(p+q)a_{n+1}+pqa_n$$

が任意の自然数 n に対して恒等式となるための必要十分条件は，

$$\left\{ \begin{array}{l} p+q=1 \\ pq=-1 \end{array} \right.$$

が成り立つことである．解と係数の関係より，上式を満たす実数 p,q の組は，t の 2 次方程式

$$t^2-t-1=0$$

の 2 解ゆえ，$(p,q)=(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2})$(複号同順) である．
以下，$(p,q)=(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})=(\phi,\phi^{-1})$ として議論を展開する．*3
①を再帰的に利用することにより，

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1}-pa_n=q^{n-1}(a_2-pa_1)=q^{n-1}(1-p)=q^n \\ a_{n+1}-qa_n=p^{n-1}(a_2-qa_1)=p^{n-1}(1-q)=p^n \end{array} \right. \text{—②}$$

を得る．②に示した 2 本の式を辺々引いて，

$$\begin{aligned} &(p-q)a_n=p^n-q^n \\ \Leftrightarrow&\sqrt{5}a_n=\phi^n-\phi^{-n} \\ \Leftrightarrow&a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n-\phi^{-n}) \end{aligned}$$

を得る．次いで，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\phi^{n+1}(1-\phi^{-2n-2})}{\phi^n(1-\phi^{-2n})}=\phi\cdot\frac{1-\phi^{-2n-2}}{1-\phi^{-2n}}\to\phi(n\to\infty)$$

を得る．すなわち，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．

*3 このように設定しても一般性を失わない．

補足

$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく．

定義より帰納的に $a_n > 0, b_n > 0 (for \forall n \in \mathbb{N})$ であることに注意して，

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} + 1 \Leftrightarrow b_{n+1} = \dfrac{1}{b_n} + 1$

が成り立つ．よって，b_nが有限確定値に収束すること，すなわち $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$を満たす$\beta$が存在することを仮定すれば，

$\beta = \dfrac{1}{\beta} + 1$ かつ$\beta > 0 \Leftrightarrow \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

が成立するであろうことを予想できる．すなわち，$\lim_{x \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$なんだろうなぁ[*4]ということを予想できる．

[*4] 絵にかいた餅

第 5 問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ．

解答 1

原点中心単位円 (O_1と命名する) のうち，第 1 象限に存在する部分 (弧 $y = \sqrt{1-x^2}$かつ $0 \leqq x \leqq 1$ および x 軸上，y 軸上に存在し原点からの距離が 1 以下であるような 2 線分によって囲まれた図形の周囲と内部の和集合) の面積は$\dfrac{\pi}{4}$である．

O_1の円周上に 7 点 $A(1,0)B(\cos\dfrac{\pi}{12}, \sin\dfrac{\pi}{12})C(\cos\dfrac{\pi}{6}, \sin\dfrac{\pi}{6})D(\cos\dfrac{\pi}{4}, \sin\dfrac{\pi}{4})E(\cos\dfrac{\pi}{3}, \sin\dfrac{\pi}{3})F(\cos\dfrac{5\pi}{12}, \sin\dfrac{5\pi}{12})G(0,1)$ をとると，次の不等式が成立する．

$$
\begin{aligned}
&(\text{扇形 } OAB \text{ の面積}) > (\text{八角形 } OABCDEFG \text{ の面積})\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} > 6 \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin\frac{\pi}{12}\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4} \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})\\
&\Leftrightarrow \pi > 3 \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{―①}
\end{aligned}
$$

引き続いて，

$$2.44 < \sqrt{6} < 2.45 \text{ と } 1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

なる 2 本の評価式により

$$\sqrt{6} - \sqrt{2} > 1.02 \Leftrightarrow 3 \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) > 3.06\text{―②}$$

が成立する．①②より，$\pi > 3.06$ であることが示せた．$(Q.E.D)$

/*以下解答 2-解答 5 は指針のみ掲載*/

解答 2

正二十四角形，面積比較，$\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ || 正二十四角形，長さ比較，$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

解答 3

正十角形，長さ比較，$\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

解答 4

正八角形，長さ比較，余弦定理

解答 5

正十二角形，長さ比較，余弦定理[*5]

//

注釈 5.1.1

なお，上記計算の中で用いた$\sin\dfrac{\pi}{12}$の値は次のように半角公式を利用して得た．

$$1-\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}\Leftrightarrow\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{4-2\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

注釈 5.1.2

四分位円の面積が$\dfrac{\pi}{4}$であることを極限を用いて厳密に示す方法は次の通り．

まず，$O(0,0)A(1,0)B(\cos\theta,\sin\theta)$ に対して，扇形 OAB の面積を $S(\theta)$ と定義する．θの増加方向が反時計回りであることに注意して，微小角$\delta\theta$増分に対応する微小扇形面積を 2 つの三角形の面積で評価した不等式は次の通り．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\delta\theta\leqq S(\theta+\delta\theta)-S(\theta)\leqq 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\frac{\delta\theta}{2}\\ \Leftrightarrow&\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}\leqq\frac{S(\theta+\delta\theta)-S(\theta)}{\delta\theta}\leqq\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}\end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}=\frac{1}{2}$　かつ　$\displaystyle\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}=\frac{1}{2}$　であるので，挟み撃ちの原理により，

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{S(\theta+\delta\theta)-S(\theta)}{\delta\theta}=\frac{1}{2}$$

すなわち関数 $S(\theta)$ の導関数が任意のθに対して存在し，$\dfrac{dS}{d\theta}=\dfrac{1}{2}$ を満たすことが示せる．定義より $S(0)=0$ であることを考慮して，　θを 0 から$\dfrac{\pi}{2}$の範囲で変化させて$\dfrac{dS}{d\theta}$を積分すると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dS}{d\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

を得る．これが求めるべき四分位円の面積である．

注釈 5.1.3

四分位円の面積は下のように置換積分 $x=\cos\theta$を利用して計算しても良い．

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\cdots=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\cdots=\frac{\pi}{4}$$

[*5] 三田紀房著，ドラゴン桜単行本第 10 巻でも取り上げられている

第 6 問

方程式 $8^x+27^x+64^x+125^x=24^x+30^x+40^x+60^x$ の実数解を全て求めよ．

解 1

[1]$x=0$ のとき，(左辺) = (右辺) = 4 が成立することより，$x=0$ は求めるべき実数解の一つである．

[2]$x\neq 0$ のとき，$2^x=A, 3^x=B, 4^x=C, 5^x=D$ とおくと，所与の方程式は

$A^3+B^3+C^3+D^3=ABC+ABD+ACD+BCD$—①と同値変形することができ，

このとき，

$$\left\{\begin{array}{l} x>0\Rightarrow(0<)A<B<C<D \\ x<0\Rightarrow A>B>C>D(>0)\end{array}\right.$$

であり，いずれにせよ A,B,C,D は互いに異なる正数—②である．

いま，以下の有名不等式を導入する．

$\dfrac{1}{3}(A^3+B^3+C^3)+\dfrac{1}{3}(A^3+B^3+D^3)+\dfrac{1}{3}(A^3+C^3+D^3)+\dfrac{1}{3}(B^3+C^3+D^3)\geqq ABC+ABD+ACD+BCD($等号成立は $A=B=C=D$ の時に限る)—③

②, ③より，①を成立させる 4 実数 (A,B,C,D) の組は存在しない．

以上 [1][2] より，求めるべき実数解は $x=0$ ただ一つである．

解 2

まず，補題として $0<a<b\leqq c<d$ かつ $ad=bc$ ならば $a+d>b+c$—①が成立することを示す．

仮定より $b-a>0$ かつ $c-a>0$ なので，

$$\begin{aligned}&(b-a)(c-a)>0\\ \Leftrightarrow& a^2+bc>ab+ac\\ \Leftrightarrow& a^2+ad>ab+ac(\because ad=bc)\\ \Leftrightarrow& a+d=b+c(\because a>0)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって①は成り立つ．

$x=0$ のとき (左辺) = (右辺) = 4 となるので，$x=0$ は求めるべき実数解である．

$x\neq 0$ のとき，①を再帰的に用いて，

$8^x+27^x+64^x+125^x>24^x+27^x+64^x+(\dfrac{125}{3})^x>24^x+30^x+64^x+(\dfrac{75}{2})^x>24^x+30^x+40^x+60^x$

を得る．よって実数解はない．

第 7 問

素数 p, q に対して，$p^q + q^p$も素数となるような (p, q) の組を全て求めよ．

解答

$[1]p \geqq 3$ かつ $q \geqq 3$ に対しては，p, q はともに奇素数 $(p \equiv q \equiv 1(mod2))$ であるので，

$p^q + q^p \equiv 1^1 + 1^1 = 2 \equiv 0$ であり，かつ $p^q + q^p \geqq 3^3 + 3^3 = 54$ であることを考慮すれば，

$p^q + q^p$は 54 以上の偶数ゆえ，素数にはなりえないことが判る．

次いで，$p^q + q^p$は p, q に関して対称式ゆえ，$p < 3$ の場合のみを考えても一般性を失わず，

$[2]p < 3$ のとき，これを満たす素数は $p = 2$ のみである．よって以下 $p = 2$ とする．

つまり，$2^q + q^2$が素数となるような素数 q の満たすべき条件を考える．

$2^3 + 3^2 = 17$ は素数なので，$q = 3$ は求めるべき素数である．

$2^5 + 5^2 = 57 = 3 \times 19$ なので，5 は題意を満たす q の候補ではない．5 より大なる任意の素数を 6 を法として分類すると，± 1 の 2 種に区分できる．

$f(n) := 2^n + n^2$として，

$i)n \equiv 1 \Rightarrow f(n) = 2^{6k+1} + (6k+1)^2 = 2 \times 64^k + 12(3k^2 + k) + 1 \equiv 2 \times (-2)^k + 1 \equiv \pm 3$

$ii)n \equiv -1 \Rightarrow f(n) = 2^{6k-1} + (6k-1)^2 = \dfrac{64^k}{2} + 12(3k^2 + k) + 1 \equiv \dfrac{(-2)^k}{2} + 1 \equiv 0, \pm 3$

(但し $i)ii)$ において k は 1 以上の整数)

より，$i)ii)$ いずれの場合にも $f(n)$ は (57 より大きい)3 の倍数となるので素数たりえない．

以上 [1][2] より，求めるべき素数 p,q の組は (p,q)=(2,3)(3,2) のみである．

第 8 問

一泊 500 円のホテルがあり，そこに 500 円玉のみ持った n 人と，1000 円札のみ持った n 人の合計 2n 人の客を泊まらせたい．ホテルの受付は受付開始時はつり銭を全く準備していないとし，また，客同士は事前にお金を融通しあうことはおろか会話すらしないものとする．つり銭が不足しないような客の来方は何通りあるか．

指針

カタラン数は $C_n = \dfrac{{}_{2n}C_n}{n+1}$ で定義される自然数列 $\{C_n\}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を構成する．
その数学的意味づけとしては以下の例が知られている．
①括弧 () の開閉の適切な並べ方の総数
②二分木
③平面グラフ交差
④格子状の経路のうち対角線をまたがない経路の総数
本問では④において，右進が 500 円客, 上進が 1000 円客に対応するとして考える．[*6]

戦法

$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 90$ あたりまで作図と状況整理で確認しておいて，組み合わせ $Combination$ において ${}_{2n}C_n$ が $2, 6, 20, 70, 252, \cdots$ であることから，C_n の一般項を予測していくのが正攻法 (?)

解答

$${}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

[*6] 対角線を超えることは，店側がつり銭を払えず「責任者出せ責任者を」案件が発生することを意味する．

第 9 問

　xy 直交座標系で表現される平面上に直線 $l : tx+y+t^2=0$ がある．t を $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かすとき直線 l の通過する領域を図示せよ．

解答 1

　(指針のみ) 順像法．1 文字固定で値域を調べた後，固定した文字を動かすイメージ．多変数関数の扱いや予選決勝法と関連する．

解答 2

　(指針) 逆像法．解の存在条件 (必要十分条件) に帰着．逆写像イメージ．

　直線 $l : tx+y+t^2=0$ を，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で t を連続的に変化させて得られた通過領域内に点 (x, y) が存在するための必要十分条件は

　$tx+y+t^2=0 \Leftrightarrow t^2+xt+y=0$ により与式を t の 2 次方程式と見て，これが $0 \leqq t \leqq 1$ なる範囲に実数解をもつことである．すなわち，

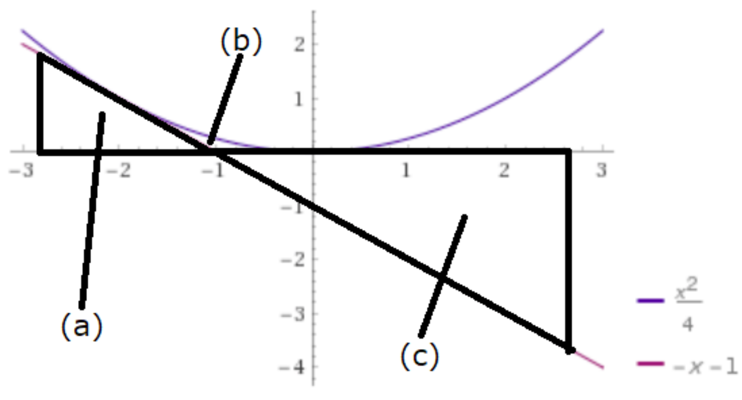
　$f(t) := t^2+xt+y = (t+\frac{x}{2})^2+y-\frac{x^2}{4}$ により $f(t)$ を定義したうえでの

$$\begin{cases} f(0)f(1) \leqq 0 \\ f(0) \geqq 0 \text{ かつ } f(1) \geqq 0 \text{ かつ } 0 \leqq -\dfrac{x}{2} \leqq 1 \text{ かつ } y-\dfrac{x^2}{4} \leqq 0 \end{cases} \quad —(\clubsuit)$$

　なる 2 条件を満たす点 (x, y) の組の和集合である．

$$(\clubsuit) \Leftrightarrow \begin{cases} y(1+x+y) \leqq 0 \\ y \geqq 0 \text{ かつ } 1+x+y \geqq 0 \text{ かつ } -2 \leqq x \leqq 0 \text{ かつ } y \leqq \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

　これを図示すると下図の通り．



　$((a)(b)(c)$ を合わせた部分．境界はすべて含む．)

第 10 問

無理数$^{\text{無理数}}$ $=$ 有理数を満たすものは存在するか．存在しないならばそのことを証明し，存在するならば実例を挙げよ．

解答

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$

$[1]\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ を仮定すると，

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ より，$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ こそが無理数$^{\text{無理数}}$ $=$ 有理数の実例である．

$[2]\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を仮定すると，

$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}$ かつ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ かつ $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ より，$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ こそが無理数$^{\text{無理数}}$ $=$ 有理数の実例である．

[1][2] より，確かに無理数$^{\text{無理数}}$ $=$ 有理数を満たすものが存在することが示された．

各問題へのコメント

第 1 問

反例として $\tan 45^\circ = 1 \in \mathbb{Q}$ を挙げたりしないように．

第 2 問

三角関数は原点中心単位円絡みで考える鉄則に従えば苦しくない．この問題は，正弦定理や余弦定理のように公式として身に付いたものが如何なる公理・公準に基づいて構築されたものであるのかを折に触れて想起しつつ議論を展開構築することの重要性を示唆している．

第 3 問

第 2 問で証明した $\cos$ の和の加法定理を利用すれば，$\dfrac{\pi}{5}$ という中途半端な角度を有名角に帰着させることにより関数電卓を使わずに数値計算が可能であるということに気づいてもらいたかったわけです．複素数平面を利用した解法 (解答 3) は対称性が保たれたまま議論が進むため美しいので載せました．他に，本 PDF には非掲載だが，頂角 $\dfrac{\pi}{5}$ なる二等辺三角形において底角の二等分線を引いた図形上での幾何的考察 (相似, 辺比 x) による導出も味わい深い (ちなみにこの図形は正五角形に対角線を引いて星形を形成した図形上に出現する)．

第 4 問

みんな大好きフィボナッチ数列の一般項を求めさせる問題．親戚にリュカ数列，トリボナッチ数列など．フラクタル [自己相似性] や黄金比 ϕ との関係性がある．無限連分数が ϕ に収束することを証明する際にフィボナッチ数列の一般項を経由する必要があるので一度は導出しておきたい．3 項間漸化式の特性方程式の動作原理の確認問題にももってこい．

第 5 問

円を正 n 角形の $n \to \infty$ 極限と見ることができるか否かが鍵．注釈 5.1.2 は，円の面積は πr^2 の証明における，グレープフルーツ大円の超微細切り分け and ひっくり返して交互に組み合わせて縦 $\times$ 横 $= r \times \pi r$ なる長方形を作る直感的方法がどうも胡散臭いと感じる人向けに，微積分の堅牢さを体感してもらう目的で書きました．

第 6 問

第 7 問と関連するが，十分条件を手計算で探しつつ問題の構造を把握して，それ以外に解がないであろうことをどう示すかの順で考えていく感覚を涵養しておきたい．式一本の 4 変数対称式なので，対称性を崩さず活かすことの出来る有名公式の利用を考えるのが筋．$S.Ramanujan$ は $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$ を瞬時に見抜く数覚を持っていたらしいが ($G.H.Hardy$ との対話@病床)，それは無理でも，累乗数は感覚的に判定してほしい．$343 = 7^3$ などは一見素数っぽいところがいやらしい．

第 7 問

整数問題，特に素数絡みの問題では，まず十分条件を探した上で，合同法 (剰余系) の話にもっていくのが正攻法．任意の 5 以上の素数は $6n \pm 1$ の 2 種類に漏れなくダブりなく分類されるという一般常識は知っておくべき．本問は $mod6$ で分類させたうえで矛盾を導く際には 3 の倍数である合成数になることを指摘させる点でややトリッキー．他に中国剰余定理やフェルマーの小定理を扱う問題もある．(整) 数論は数学の女王．数学は科学の華．

第 8 問

カタラン数．中学受験算数で必須のテクニックゆえ知名度は高いのではなかろうか．本問は端 2 つを除外して考える漸化式立式による解法構築が出来そうで出来ないところが曲者 (?)．発見的解法として $n = 1, 2, 3, \cdots$ として立式した後帰納法で証明する手が現実的であるように思う．

第 9 問

線分の通過領域問題における順像法/逆像法/包絡線の解法比較にもってこいの問題．

第 10 問

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数であるか無理数であるかはわからないが (おそらく無理数でしょうけど) 存在証明が出来るのが感動ポイント．[*7]

出典

第 1 問	2006 年, 京都大学, 理系後期, 数学, 第 6 問
第 2 問	1999 年, 東京大学, 前期, 数学, 第 1 問 (文理共通)
第 3 問	有名問題
第 4 問	有名問題
第 5 問	2003 年，東京大学, 前期, 数学, 第 6 問
第 6 問	完全攻略数学オリンピック (秋山仁, ピーターフランクル)
第 7 問	2016 年, 京都大学, 理系前期, 数学, 第 2 問
第 8 問	IMO 代表選抜二次試験,1992
第 9 問	有名問題
第 10 問	詠み人知らず[*8]

[*7] より詳しく学習したい人は数理論理学∈数学基礎論へどうぞ．

[*8] 情報源をご存知の方，plz let me know who invented this question